

INTÉRÊTS COMPOSÉS

Les intérêts sont dits **composés** si, à la fin de chaque période, les intérêts générés au cours de celle-ci sont **ajoutés au capital** pour un prochain calcul d'intérêts. Les intérêts générés rapportent alors eux-mêmes des intérêts.

CAPITALISATION À INTÉRÊTS COMPOSÉS

La **capitalisation à intérêts composés** s'obtient de la façon suivante.

Après une durée d'une période: $C_1 = C_0(1 + i) = C_0(1 + i)^1$

Après une durée de deux périodes: $C_2 = C_0(1 + i)(1 + i) = C_0(1 + i)^2$

Après une durée de trois périodes: $C_3 = C_0(1 + i)(1 + i)(1 + i) = C_0(1 + i)^3$

⋮

⋮

Après une durée de n périodes: $C_n = C_0(1 + i)(1 + i) \dots (1 + i) = C_0(1 + i)^n$
n fois

On obtient alors la formule suivante.

$$C_n = C_0(1 + i)^n, \text{ où: } \left\{ \begin{array}{l} - C_n \text{ est le capital accumulé;} \\ - C_0 \text{ est le capital initial;} \\ - i \text{ est le taux d'intérêt composé;} \\ - n \text{ est la durée (c'est-à-dire le nombre de périodes).} \end{array} \right.$$

Note: Au besoin, on transforme la durée n de façon à obtenir la même unité de temps que le taux d'intérêt i .

Exemples: 1) On place un capital initial de 1000 \$ à un taux d'intérêt composé annuel de 6 %. On veut déterminer à combien s'élèvera le capital accumulé dans 10 ans.

Ici, $n = 10$ ans, $i = 6\%$ et $C_0 = 1000$ \$.

$$\begin{aligned} C_n &= C_0(1 + i)^n \\ C_{10} &= 1000(1 + 6\%)^{10} \\ &= 1000(1,06)^{10} \\ &\approx 1790,85 \end{aligned}$$

Donc, 1790,85 \$.

Dans 10 ans, le capital accumulé sera de 1790,85 \$.

2) On emprunte un capital initial de 800 \$ à un taux d'intérêt composé mensuel de 2 %. On veut déterminer à combien s'élèvera le capital accumulé dans un an.

Ici, $i = 2\%$ et $C_0 = 800$ \$.

$$n = 1 \times 12 = 12 \text{ mois}$$

$$\begin{aligned} C_n &= C_0(1 + i)^n \\ C_{12} &= 800(1 + 2\%)^{12} \\ &= 800(1,02)^{12} \\ &\approx 1014,59 \end{aligned}$$

Donc, 1014,59 \$.

Dans un an, le capital accumulé sera de 1014,59 \$.

ACTUALISATION À INTÉRÊTS COMPOSÉS

L'actualisation à intérêts composés s'obtient de la formule de capitalisation à intérêts composés.

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

$$\frac{C_n}{(1 + i)^n} = C_0$$

$$C_n(1 + i)^{-n} = C_0$$

On obtient alors la formule suivante.

$$C_0 = C_n(1 + i)^{-n}, \text{ où :}$$

- C_0 est le capital initial;
- C_n est le capital accumulé;
- i est le taux d'intérêt composé;
- n est la durée (c'est-à-dire le nombre de périodes).

Note : Au besoin, on transforme la durée n de façon à obtenir la même unité de temps que le taux d'intérêt i .

Exemples : 1) Quatre ans après avoir contracté une dette, on l'a remboursée à l'aide d'une somme de 3939,28 \$. Sachant que le taux d'intérêt composé annuel était de 3 %, on veut déterminer à combien s'élevait le capital initial emprunté.

Ici, $n = 4$ ans, $i = 3 \%$ et $C_4 = 3939,28$ \$.

$$C_0 = C_n(1 + i)^{-n}$$

$$\begin{aligned} C_0 &= 3939,28(1 + 3 \%)^{-4} \\ &= 3939,28(1,03)^{-4} \\ &\approx 3500 \end{aligned}$$

Donc, 3500 \$.

Le capital initial était de 3500 \$.

2) Un placement d'une durée de 7 ans à un taux d'intérêt composé semestriel de 5 % permet d'obtenir un capital accumulé de 3959,86 \$. On veut déterminer à combien s'élevait le capital initial placé.

Ici, $i = 5 \%$ et $C_n = 3959,86$ \$.

$n = 7 \times 2 = 14$ semestres

$$\begin{aligned} C_0 &= C_n(1 + i)^{-n} \\ C_0 &= 3959,86(1 + 5 \%)^{-14} \\ &= 3959,86(1,05)^{-14} \\ &\approx 2000 \end{aligned}$$

Donc, 2000 \$.

Le capital initial était de 2000 \$.

DURÉE D'UN PLACEMENT, D'UN PRÊT OU D'UN EMPRUNT À INTÉRÊTS COMPOSÉS

Il est possible de déterminer la durée d'un placement, d'un prêt ou d'un emprunt à intérêts composés en isolant, à l'aide des **logarithmes**, la variable n dans la formule de capitalisation à intérêts composés.

Exemple : On a placé 500 \$ à un taux d'intérêt composé annuel de 2,5 %. On veut déterminer dans combien d'années le capital accumulé sera de 579,85 \$.

Ici, $C_0 = 500$ \$, $i = 2,5 \%$ et $C_n = 579,85$ \$.

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

$$579,85 = 500(1 + 2,5 \%)^n$$

$$579,85 = 500(1,025)^n$$

$$\frac{579,85}{500} = 1,025^n$$

$$1,1597 = 1,025^n$$

$$n = \log_{1,025} 1,1597$$

$$= \frac{\log 1,1597}{\log 1,025}$$

$$\approx 6$$

Donc, 6 ans.

Le capital accumulé sera de 579,85 \$ dans 6 ans.

On peut valider ce résultat de la façon suivante.

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

$$C_6 = 500(1 + 2,5 \%)^6$$

$$= 500(1,025)^6$$

$$\approx 579,85$$

Donc, 579,85 \$.

Dans 6 ans, le capital accumulé sera de 579,85 \$.

TAUX D'INTÉRÊT COMPOSÉ

Il est possible de déterminer le taux d'intérêt composé d'un placement, d'un prêt ou d'un emprunt en isolant la variable i dans la formule de capitalisation à intérêts composés.

Exemple : On a emprunté 5800 \$ et, après 4 ans, le capital accumulé s'élève à 7103,80 \$. On veut déterminer à quel taux d'intérêt composé annuel cet emprunt a été contracté.

Ici, $n = 4$ ans, $C_0 = 5800$ \$ et $C_4 = 7103,80$ \$.

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

$$7103,80 = 5800(1 + i)^4$$

$$\frac{7103,80}{5800} = (1 + i)^4$$

$$\left(\frac{7103,80}{5800}\right)^{\frac{1}{4}} = 1 + i$$

$$i = \left(\frac{7103,80}{5800}\right)^{\frac{1}{4}} - 1$$

$$\approx 0,052$$

Donc, 5,2 %.

Le taux d'intérêt composé annuel était de 5,2 %.

On peut valider ce résultat de la façon suivante.

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

$$C_4 = 5800(1 + 5,2\%)^4$$

$$= 5800(1,052)^4$$

$$\approx 7103,80$$

Donc, 7103,80 \$.

À un taux d'intérêt composé annuel de 5,2 %, l'emprunt de 5800 \$ s'élève à 7103,80 \$ après 4 ans.

PÉRIODE D'INTÉRÊT INCOMPLÈTE

Si la durée d'un placement, d'un prêt ou d'un emprunt à intérêts composés correspond à une ou plusieurs périodes d'intérêt complètes et à une période d'intérêt incomplète, il est possible de déterminer le capital accumulé à l'aide de la démarche suivante.

Démarche	<i>Exemple :</i> On place un capital initial de 9000 \$ à un <u>taux d'intérêt composé annuel</u> de 3 %. On veut <u>déterminer le capital accumulé dans 4 ans et 9 mois</u> .
1. Calculer le capital accumulé à intérêts composés pour les périodes d'intérêt complètes à l'aide de la formule $C_n = C_0(1 + i)^n$.	Ici, le taux d'intérêt est composé pour des périodes correspondant à un an. Il y a donc 4 années complètes où les intérêts composés s'appliquent. Ici, $n = 4$ ans, $i = 3\%$ et $C_0 = 9000$ \$. $C_n = C_0(1 + i)^n$ $C_4 = 9000(1 + 3\%)^4$ $= 9000(1,03)^4$ $\approx 10\,129,58$ Donc, 10 129,58 \$. Après 4 années complètes, le capital accumulé sera de 10 129,58 \$.
2. À partir du résultat obtenu à l'étape précédente, calculer le capital accumulé à intérêts simples pour la période d'intérêt incomplète à l'aide de la formule $C_n = C_0(1 + n \times i)$.	Il y a 9 mois, soit $\frac{9}{12} = 0,75$ année, où les intérêts simples s'appliquent. Ici, $n = 0,75$ année, $i = 3\%$ et $C_0 = 10\,129,58$ \$. $C_n = C_0(1 + n \times i)$ $C_{0,75} = 10\,129,58(1 + 0,75 \times 3\%)$ $= 10\,129,58(1,0225)$ $\approx 10\,357,50$ Donc, 10 357,50 \$. Après 4 ans et 9 mois, le capital accumulé sera de 10 357,50 \$.

RENFORCEMENT**4.3** Intérêts composés

1 Dans chaque cas, déterminez le capital accumulé.

- a) On investit une somme de 3600 \$ sur une période de 6 ans à un taux d'intérêt composé annuel de 8,75 %.
- b) On emprunte une somme de 12 000 \$ pendant 5 ans à un taux d'intérêt composé mensuel de 1,05 %.

Réponse: _____

Réponse: _____

2 Dans chaque cas, déterminez le capital initial.

- a) Dans 7 ans, le remboursement d'une dette à un taux d'intérêt composé annuel de 9 % sera de 4935,71 \$.
- b) À un taux d'intérêt composé trimestriel de 2,95 %, le capital accumulé d'un placement atteindra 9113,14 \$ dans 4,5 ans.

Réponse: _____

Réponse: _____

3 Dans chaque cas, déterminez la durée du placement ou de l'emprunt.

- a) Un placement de 2500 \$ a une valeur de 4360,12 \$ à un taux d'intérêt composé de 7,2 %.
- b) Le remboursement d'un emprunt de 11 900 \$ à un taux d'intérêt composé semestriel de 4,3 % est de 18 909,25 \$.

Réponse: _____

Réponse: _____

4 Dans chaque cas, déterminez le taux d'intérêt composé.

- a) Le remboursement d'un capital initial de 7200 \$ à un taux d'intérêt composé annuel est de 10 930,11 \$ après 4 ans.
- b) Une somme de 3800 \$ placée à un taux d'intérêt composé hebdomadaire génère un capital accumulé de 5030,65 \$ après 3 ans.

Réponse: _____

Réponse: _____

- 5** Afin de l'encourager à poursuivre ses études, Paul propose à son fils de lui donner 1000 \$ à la fin de son baccalauréat dans 3 ans. Quelle somme Paul doit-il placer immédiatement à un taux d'intérêt composé annuel de 8,25 % pour obtenir 1000 \$ dans 3 ans ?

Réponse: _____

- 6** Afin de changer son équipement, une adepte du parachutisme emprunte 8500 \$ à un taux d'intérêt composé mensuel de 0,5 % pour une période de 4 ans. Quelle somme devra-t-elle verser pour rembourser ce prêt ?

Réponse: _____

- 7** À la naissance de sa fille, Yolande a investi 2000 \$ dans un régime d'épargne études à un taux d'intérêt composé annuel de 4,2 %. Dans combien d'années le capital accumulé sera-t-il de 3862,90 \$?

Réponse: _____

- 8** On place un capital de 13 300 \$ pendant 4 ans et 3 mois à un taux d'intérêt composé annuel de 7 %. Quel sera le capital accumulé ?

Réponse: _____

- 1** Au cours du calcul d'un capital accumulé, il arrive que les capitalisations se fassent plusieurs fois pour une période d'intérêt donnée. Par exemple, on donne généralement un taux d'intérêt composé annuel, mais les capitalisations peuvent néanmoins se faire chaque semestre, chaque trimestre, chaque mois, etc. La formule suivante permet alors de déterminer le capital accumulé.

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{kn}, \text{ où : } \begin{cases} - C_n \text{ est le capital accumulé;} \\ - C_0 \text{ est le capital initial;} \\ - i \text{ est le taux d'intérêt composé annuel;} \\ - k \text{ est le nombre de capitalisations par année;} \\ - n \text{ est la durée en années.} \end{cases}$$

- a) On place 2000 \$ à un taux d'intérêt composé annuel de 10 %. Quel sera le capital accumulé dans 6 ans si les intérêts sont capitalisés :

1) annuellement ?

2) semestriellement ?

Réponse: _____

Réponse: _____

3) trimestriellement ?

4) mensuellement ?

Réponse: _____

Réponse: _____

5) quotidiennement ?

6) chaque seconde ?

Réponse: _____

Réponse: _____

- b) Que remarquez-vous ?
